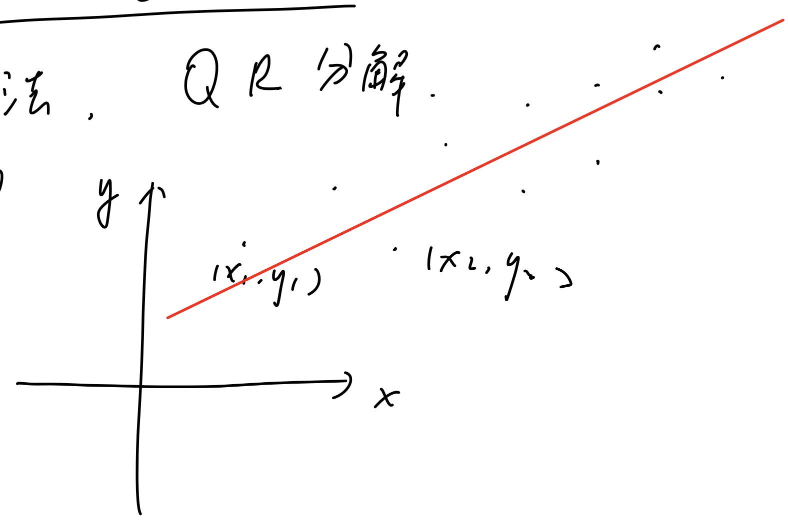
周四下午 4-5pm. 腾讯会议. office hour.

$\mathbb{R}^n$, 内积, 距离

最小二乘法, QR 分解

问题: (1)



找到 $y = kx + b = f(x)$ 找 (k, b)

使得: $\sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|^2$ 最小. $= q(?)$

代入 k, b. 关于 k, b 的二次式

(配方)

(2) 找 $y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 = f(x)$

使得 $\sum_{i=1}^{n} |y_i - f(x_i)|^2$ 最小,

(1). $\left| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_4 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} b \\ k \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{B} \right|^2$ 最小.

$\overset{''}{A}$ $\quad\quad$ $\overset{''}{y}$

$$q\left(A\cdot\begin{pmatrix} b \\ h \end{pmatrix}-y\right)$$ 最小.

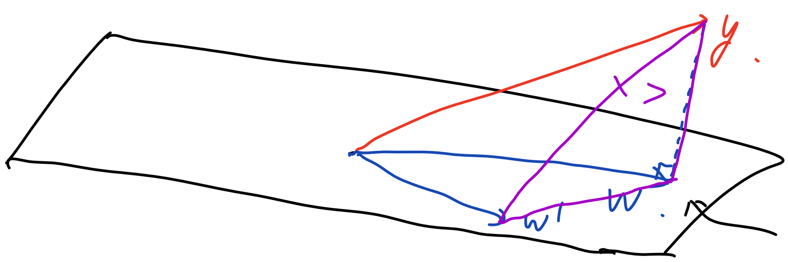
(2) $A=\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}}_{\text{列向量线性无关}}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=a.$

$|Aa-y|^2$ 最小

$rk\,A=3$

(3) 几何上 $A=(w_1,\ w_2,\ w_3)$

$$\Big|\underbrace{a_1w_1+a_2w_2+a_3w_3}_{w'}-y\Big|^2$$



$W\in \mathrm{Span}(w_1,w_2,w_3)$

$W\ \ \dim=3$

$W\subset\mathbb{R}^n$ 子空间.

Claim，存在 $y = w + v$，$w \in W$

且 $v \perp w_1$，$v \perp w_2$，$v \perp w_3$

$\langle v, x \rangle = 0, \forall x \in W$.

则 $\forall w' \in W$,

$$|y - w'|^2 = |w + v - w'|^2$$

$$= |(w - w') + v|^2$$

$w - w' \in W$

$$= \langle \underline{w - w'} + v, \underline{w - w'} + v \rangle$$

$$= \underline{|w - w'|^2} + |v|^2$$

$$\geq |v|^2$，等号成立当且仅当

$w = w'$

$\boxed{\text{正交补}}$：$W \subset \mathbb{R}^n$ 子空间.

$$W^{\perp} = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W \}.$$

验证：① $W^{\perp}$ 是子空间.

$0 \in W^{\perp}$. $\langle , \rangle$ 双线性性. $\Rightarrow$

$W^\perp$ 加法封闭，数乘封闭.

② $W \cap W^\perp = \{0\}$.

pf: $\forall\, v \in W \cap W^\perp$.

$\langle v, v \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$

③ $W + W^\perp = \mathbb{R}^n$

pf: (Gram-Schmidt) W 存在标准正交基.

$v_1, v_2, \cdots, v_k$.

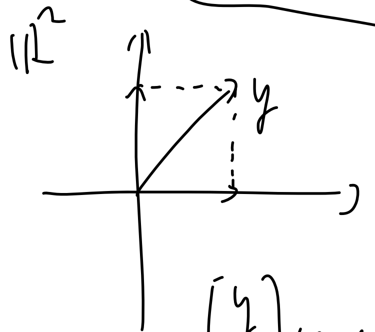
$\forall\, y \in \mathbb{R}^n$.

令 $w = \sum_{i=1}^{k} \langle y, v_i \rangle v_i$

则 $\langle w, v_j \rangle$

$= \langle y, v_j \rangle$

$\Rightarrow \langle y - w, v_j \rangle = 0$.



$[y]_{\{e_1, e_2\}} = \begin{pmatrix} \langle y, e_1 \rangle \\ \langle y, e_2 \rangle \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y - w \in W^\perp$.

$y = \underset{W}{w} + \underset{W^\perp}{(y - w)}$.

$\Rightarrow W \oplus W^\perp = \mathbb{R}^n$.

(练习: $(W^\perp)^\perp = W$)

③ => 求解算法.

R_1 3×3
上三角. 对角线 $\neq 0$

$$A = (w_1, w_2, w_3) = \underbrace{(v_1, v_2, v_3)}_{Q_1} \cdot R_1$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = Q_1 \cdot R_1 \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = w, \quad [w]_{\{v_1, v_2, v_3\}} = \begin{pmatrix} \langle y, v_1 \rangle \\ \langle y, v_2 \rangle \\ \langle y, v_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\boxed{R_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = Q_1^T \cdot y}$$

$$A = QR = \underline{(Q_1, a_2)} \begin{bmatrix} R_1 \\ \hline 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q \in O(n)}$$

计算机程序中. $\cdots \underbrace{Q_3 Q_2 Q_1}_{Q_i \in O(n)} A = R$

Q^T

对 (A, y) 同时作 $Q_1, Q_2 \dots$ 左乘

$$R\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = Q^T y.$$

抽象内积： V $\mathbb{R}$-线性空间.

定义：函数 B: $V \times V \to \mathbb{R}$ 双线性型 是指
$(v, w) \mapsto B(v,w)$

$B(v_1+v_2, w) = B(v_1,w) + B(v_2,w)$

$B(c\cdot v, w) = c\cdot B(v,w)$

对一般 $\mathbb{K}$,

$B(v, w_1+w_2) = B(v,w_1) + B(v,w_2)$

$B(v, c\cdot w) = cB(v,w)$

$\dim\{B \mid B \text{ 双线性}\}$!? $(\dim V = n)$

定义：（对称性） $B(v,w) = B(w,v)$

定义：（半正定性） $B(v,v) \geq 0$, $\forall v \in V$

（正定性）. $B(v,v) > 0$, $\forall v \neq 0$.

定义：内积：对称正定双线性型.

例子：$(\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$ 标准内积

定义为 $\mathbb{E}^n$, Euclidean space.

例子：$V = M_n(\mathbb{R})$. $B(X, Y) = \mathrm{tr}(X^T Y)$

例子：$V = C^\infty([0,1])$

$$B(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt.$$

(Cauchy) 成立. $|B(X,Y)|^2 \le B(X,X) \cdot B(Y,Y)$

$$\left|\int_0^1 fg\, dt\right|^2 \le \left(\int_0^1 f^2 dt\right) \cdot \left(\int_0^1 g^2 dt\right)$$

性质：$\dim V < +\infty$, V 有标准正交基.

pf: (Gram-Schmidt)

性质：V 有标准正交基 $C: \{v_1, \cdots, v_n\}$

$$\langle [v]_C, [w]_C \rangle = B(v, w)$$

Pf：$[v]_C = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x$, $\quad v = \sum_{i=1}^n x_i v_i$

$[w]_C = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y \quad w = \sum_{i=1}^n y_i v_i$

$$B(v, w) = B(\sum_{i=1}^n x_i v_i, \sum_{j=1}^n y_j v_j)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j B(v_i, v_j) = x^T G y$$

$$B(v_i, v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

性质（唯一性）$\dim V = n$，B 内积。

$$F: V \to \mathbb{E}^n \quad \text{是 } (V, B)$$
$$v \mapsto [v]_C \quad \text{到 } (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$$

的同构.

$B(v, w) = \langle F(v), F(w) \rangle$

性质: 对双线性型 B, 基 $C = \{v_1 \cdots v_n\}$

$B(v_i, v_j)$ 唯一确定 V

$\{B \text{ 双线性}\} \xrightarrow{\cong} M_n(\mathbb{R})$

$B \longmapsto \left(B(v_i, v_j)\right)_{n \times n}$

$\dim\{\text{对称双线性 } B\} = ?\ \frac{n(n+1)}{2}$

$B(v_i, v_j) = B(v_j, v_i)$

定义: $\overset{G}{\overset{\shortparallel}{\left(B(v_i, v_j)\right)_{n \times n}}}$ 是 B 在基 C 下的 Gram 矩阵.

对称: $G = G^T$.

正定：$x^TGx > 0, \quad \forall x \neq 0, \in \mathbb{R}^n.$

半正定：$x^TGx \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

正交多项式 $\quad \mathbb{R}[x]$ 上有内积

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\underline{w(x)}\,dx$$

$w(x) > 0$, weight function.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)\,dx$$

$\mathbb{R}[x]$ 上有基，$\underline{1}$，x，x^2，x^3 ⋯

$$\int_{-1}^{1} 1\cdot 1\,dx = 2. \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \left(\int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = x. \qquad \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\,dx}}$$

$x^2 - \ldots$

$$\begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_1(x) = x \\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ \vdots \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{1} (P_0)^2 \, dx = 2$$

$$\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2 \, dx = \frac{2}{2n+1}$$

$$\boxed{P_n(1) = 1}$$

验证：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \boxed{(x^2-1)^n}$$

$$B(P_n, P_m) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ \frac{2}{2n+1} & m = n \end{cases}$$

(Legendre polynomial)

对比较“好”的 $w(x)$，有类似公式

对于 (V, B) 考虑，有某些关于 B 的性质的线性变换。

V, B 内积

"保持"

定义：$O(V) = \{ T: V \to V$ 线性 $\mid \underline{B(T(v), T(w)) = B(v, w)} \}$

当 $(V = \mathbb{R}^n, \langle , \rangle)$. $O(V) = O(n)$

一般 $\dim V = n$, $O(V)$ 和 $O(n)$ 有一一对应.

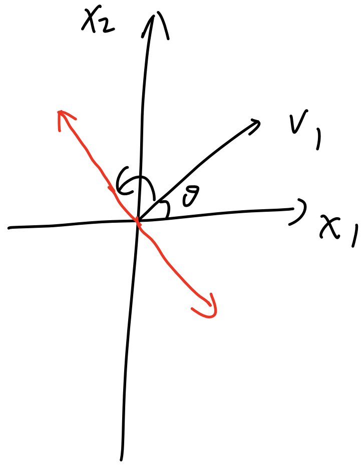
$\underline{n=1}$. $A \in O(1)$, $A = (a)$

$(ax)(ax) = x^2 \Rightarrow a^2 = 1$.
$\forall x$. $\Rightarrow a = \pm 1$

$O(1) = \{\pm 1\}$.

$A \in O(2)$

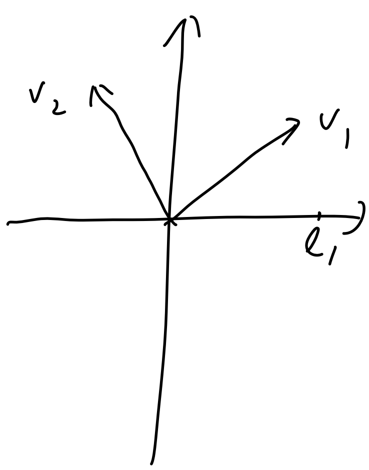
$n=2$. $A = [v_1, \ v_2]$, $A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



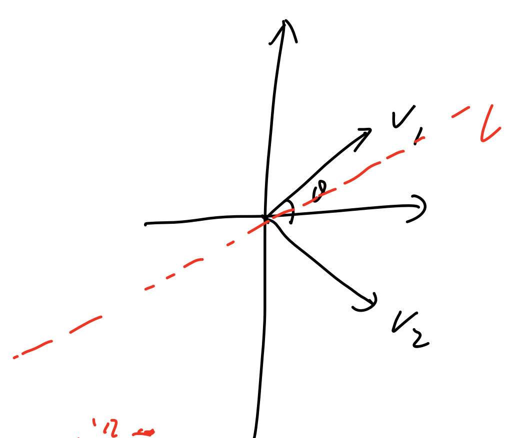
$v_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$, 或 $\begin{pmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$



逆时针转θ



l 斜率 $= \tan\frac{\theta}{2}$ 沿着 l 的反射

对于 V, $\dim V=2$. $T\in O(V)$

在标准正交基 $C=(w_1, w_2)$ 下, 有

$[T]_C$ = 前一个 称 T 为旋转

后一个 称 T 为反射.

QR 分解:

Givens

$Q_k\cdots Q_2Q_1A$

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

旋转 $$\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Householder 反射.